KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU

predavanja 2017/18

RASPODJELE DISKRETNIH PROMJENLJIVIH

1. **Binomna raspodjela**
2. **Puasonova raspodjela**

P5

Diskretna slučajna promjenljiva i karakteristične raspodjele vjerovatnoća

- Funkcija X koja svakom elementarnom ishodu (događaju) jednog eksperimenta , pridružuje neki realan broj naziva se **slučajna (aleatorna) promjenljiva X.**
- **Diskretna slučajna promjenljiva** uzima sa pozitivnim vjerovatnoćama konačan broj vrijednosti ili prebrojivo mnogo vrijednosti (da se mogu prebrojati skupom prirodnih brojeva)

  *Slučajna promenjiva X je **diskretnog tipa (diskretna slučajna promenljiva)** ako je njen skup vrijednosti $x_k \in S(X)$ konačan ili beskonačan (ali prebrojiv) niz realnih brojeva.*
- Skup uređenih parova čiji prvi član predstavlja vrijednost $\boldsymbol{x_k}$ $\in S(X)$ slučajne promjenljive X, a drugi član predstavlja vjerovatnoću $\boldsymbol{p_k = P(X=x_k)}$ da slučajna promjenljiva X uzme pomenutu vrijednost $\boldsymbol{x_k}$ naziva se **raspodjela vjerovatnoće slučajne promjenljive X.**
- **Najznačajnije raspodjele vjerovatnoća diskretne slučajne promjenljive:**
  - binomna raspodjela
  - Puasonova raspodjela
  - hipergeometrijska.....

Binomna raspodjela B(n,p)

- Definisana na osnovu matematičke šeme koju je definisao Bernuli (1654-1705) za n-tostruko ponavljanje eksperimenta (Bernulijeva šema, „nula-jedan“ raspodjela)

- **Binomna raspodjela B(n,p)** definiše kolika je vjerovatnoća da će se u ***n*** nezavisnih eksperimenata događaj *A* realizovati *x* puta, a da se neće realizovati $n-x$ puta, pod uslovom da je $0 \leq x \leq n$.
- Uslovi koje ispunjava slučajna promjenljiva ***X***=broj realizacije događaja A u ***n*** eksperimenata, da bi imala binomnu raspodjelu ***B(n,p):***
  – svi eksperimenti se obavljaju pod istim uslovima
  – svi eksperimenti su nezavisni jedan od drugog: vjerovatnoća pojave događaja A u svakom eksperimentu ne zavisi od toga da li se događaj A pojavio ili nije u drugim (prethodnim ili narednim) eksperimentima
  – vjerovatnoća realizacije događaja A u svakom od eksperimenata je konstantna i jednaka p, odnosno

$$P(A)=p, \quad P(\bar{A})= 1-p=q$$

Zakon raspodjele vjerovatnoće (funkcija vjerovatnoće)

- Treba odrediti **zakon raspodjele (funkciju vjerovatnoće) slučajne promjenljive *X*** (broj realizacije događaja A) , odnosno odrediti vjerovatnoću da promenljiva ***X*** uzme vrijednost ***x,*** odnosno da se u ***n*** puta ponovljenom eksperimenti, realizovao događaj A :

  f(x)=P(X = x)= p(x),   x={0,1,2,3,4,....n}

  - Ishod jednog eksperimenta mogu biti događaji A i Ā (koji su uzajamno nezavisni)
  - vjerovatnoća pojave događaja A u jednom eksperimentu je ***p,*** a vjerovatnoća pojave događaja Ā je ***q=1-p***
  - Ishodi ***n*** ponovljenih eksperimenata su uređene ***n-torke*** sastavljene od događaja A i Ā
  - Povoljne su one n-torke koje sadrže ***x*** događaja A i ***n -x*** događaja Ā, a vjerovatnoća svake od ovih n-torki događaja je:

    $$p^x \cdot q^{n-x}$$

  - Takvih povoljnih n-torki ima $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ pa je zato zakon raspodjele vjerovatnoće (funkcija vjerovatnoće) slučajne promjenljive X:

    $$\boldsymbol{f(x) = p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}}$$

Funkcija raspodjele vjerovatnoće (za slučajne promjenljive sa binomnom raspodjelom)

– Ako sračunamo sumu svih vjerovatnoća ***p(X)***, ona treba da bude =1

$$\sum_{x=0}^{n} p(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = q^n + \binom{n}{1} p \cdot q^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} p^{n-1} \cdot q + p^n$$
$$= (q+p)^n = 1^n = 1$$

$\binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$ - članovi binomnog razvoja $(q+p)^n$

- Za slučajnu promjenljivu X koja ima binomni zakon raspodjele može se definisati i **funkcija raspodjele (kumulativne) vjerovatnoće** u sljedećem obliku:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & za\ x \leq 0, \\ \sum_{x \leq k} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, & za\ 0 \leq x \leq n \\ 1, & za\ n < x \end{cases}$$

*Za sve slučajne promjenljive **X** koje imaju sliku **R(X) = {0;1;2;....n}** i funkciju vjerovatnoće $f(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$ kažemo da imaju binomnu distribuciju s parametrima **n** i **p** i označavamo: **X~B(n,p)***

Parametri binomne raspodjele

$$\boldsymbol{f(x) = p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}}$$

- matematičko očekivanje:

$$M(X) = n \cdot p$$

- disperzija (varijansa):

$$D(X) = s^2 = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

- Standardno odstupanje

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

- za proračun p(x) može se koristiti i rekurentna formula:

$$\boldsymbol{p(x) = \frac{n - x + 1}{x} \cdot \frac{p}{q} \cdot p(x - 1)}$$

- *Ako n→∞ binomna distribucija teži normalnoj distribuciji (Muavr-laplasova teorema).*
- *Ako **n**→∞ i **p→0** binomna distribucija teži Puasonovoj raspodjeli*

Binomna raspodjela

- **Primjer 1:** Eksperiment se sastoji u bacanju kockice za igru. Posmatra se događaj A: „Pao je broj 6“. Ako se eksperiment ponovi 30 puta, pitamo se koliko puta možemo očekivati „šesticu“ , kao i koliko je prosječno odstupanje broja „šestica“ od očekivane vrijednosti? Naći vjerovatnoću da su pale makar 2 šestice.
- **Rješenje:** Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj pojavljivanja „šestice“. Tada X ima binomnu raspodelu B(30,1/6), pa je zbog toga:
  - matematičko očekivanje pojavljivanja broja 6 u 30 ponovljenih bacanja kockica:
  $$M(X) = n \cdot p = 30 \cdot \frac{1}{6} = 5$$
  - disperzija (varijansa):
  $$D(X) = s^2 = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1-p)$$
  - Standardno odstupanje=prosječno odstupanje=kvadratni korjen od (matematičkog očekivanja kvadrata odstupanja slučajne promjenljive od matematičkog očekivanja)
  $$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{30 \cdot 1/6 \cdot 5/6} = 2{,}04$$
  - Pale najmanje 2 šestice:- naći p(2)+p(3)+p(4)+....p(30), ili jednostavnije:

$$F(X \geq 2) = 1 - F(X < 2) = 1 - \sum_{x \leq k} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = 1 - \left\{ \binom{30}{0} \cdot (\frac{1}{6})^0 \cdot (\frac{5}{6})^{30-0} + \binom{30}{1} \cdot (\frac{1}{6})^1 \cdot (\frac{5}{6})^{30-1} \right\}$$
$$= 1 - (0{,}004213 + 0{,}025276) = 1 - 0{,}029489 = 0{,}97051$$

Binomna raspodjela

- **Primjer 2:** Uređaj se sastoji od 8 djelova. Vjerovatnoća da se jedan dio pokvari je 0,3, a djelovi se kvare nezavisno jedan od drugog. Odrediti vjerovatnoće događaja:
  - A: pokvarila su se tačno dva dijela,
  - B: pokvarila su se najviše tri dijela,
  - C: pokvarila su se bar dva dijela.
- **Rješenje:** Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj pokvarenih djelova. Tada ona ima binomnu raspodjelu B(8;0,3)
  - **A: pokvarila su se tačno dva dijela**:- naći p(2)

$$\boldsymbol{p(2) = P(X=2) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \binom{8}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^{8-2} = 0,2965}$$

  - **B: pokvarila su se najviše dva dijela**:- naći p(0)+p(1)+p(2)

$$\boldsymbol{F(X \leq 2) = \sum_{x \leq k} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$$

$$\boldsymbol{= \binom{8}{0} \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^{8-0} + \binom{8}{1} \cdot 0,3^{11} \cdot 0,7^{8-1} + \binom{8}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^{8-2} = 0,55175}$$

  - **C: pokvarila su se bar dva dijela**:- naći p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)+p(7)+p(8), ili jednostavnije =nije se pokvario najmanje 1 dio ;

P(C) = P{X≥2} = 1-P{X<2} = 1- (P{X =0} + P{X =1})=1-(0,0576+0,19765)=0,728

Puasonova raspodjela Po(λ)

- Definisana je kao granični slučaj binomne raspodjele (Simeon Denis Poisson (1781-1840)
- Ako u binomnoj raspodjeli B(n,p) za fiksirano ***x*** stavimo da ***n***→∞ i ***p→0,*** ali tako da je ***np=λ=const***, onda binomna raspodjela teži Puasonovoj raspodjeli definisanoj sljedećim zakonom raspodjele vjerovatnoća

$$\left.\begin{array}{l} P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,3 \dots, \lambda > 0 \\ \sum_{x=0}^{\infty} P_\lambda(x) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1 \end{array}\right\}$$

- **praktično se Puasonova raspodjela može koristiti za n≥50, i p≤0,1** (primjenjuje se na rijetke događaje)
- za proračun se može koristiti rekurentni obrazac

$$\boldsymbol{P_\lambda(x) = \frac{\lambda}{x} \cdot P_\lambda(x-1)}$$

Parametri Puasonove raspodjele

$$\boldsymbol{P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}} \quad , \qquad \boldsymbol{x = 0, 1, 2, 3 \dots, \lambda > 0}$$

- matematičko očekivanje:

$$M(X) = \lambda$$

- disperzija (varijansa):

$$D(X) = s^2 = \lambda$$

- Standardno odstupanje

$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

Puasonova raspodjela

- **Primjer 3:** U skladištu se nalazi p = 1% neispravnih proizvoda.Naći vjerovatnoću da se u izabranom uzorku od r elemenata iz skladišta nađe bar jedan neispravni proizvod.
- **Rješenje:**
  - Vjerovatnoća da je izabrani proizvod neispravan p=0,01
  - slučajna promjenljiva X = broj neispravnih proizvoda u uzorku ima binomnu distribuciju $X \sim B(r; p)$.
  - za $n \geq 50$, i $p \leq 0,1$ (može se raspodjela aproksimirati Puasonovom), jer je r=100, i p=0,01
  - $\lambda = n \cdot p = r \cdot p = 100 * 0,01 = 1$
  - vjerovatnoća da je makar jedan proizvod u uzorku neispravan $P_\lambda(X \geq 1)$, jednaka je ostatku vjerovatnoće da je jedan ispravan

$$P_\lambda(X \geq 1) = 1 - P_\lambda(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\lambda^0 \cdot e^{-1}}{0!} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

$$= 1 - \frac{1}{2,7181} = 0,6321$$

Puasonova raspodjela

- **Primjer 4:** Kroz naplatnu kućicu prođu prosječno u minuti 2 automobila. Kolika je vjerovatnoća da će u toku bilo koje minute proći:

  (a) jedan automobil,

  (b) barem 3 automobila?

$$P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3 \ldots, \lambda > 0$$

Rješenje: Broj automobila koji prođu naplatnu kućicu u jednoj minuti ima Puasonovu raspodjelu Po(λ),

λ=2

a) $P_\lambda(X = 1) = \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} = 2/e^2 = 0,27067$

b) $P_\lambda(X \geq 3) = 1 - P_\lambda(X < 3) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\big) =$
$1 - (e^{-2} \cdot (\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!})) = 1 - 0,6766 = 0,3233$

Literatura

- Vukadinović, S.: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Privredni pergled, Beo
- Vukadinović, S.: Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće, Privredni pergled, Beograd, 1983
- Čuljak, V: Vjerojatnost i statistika, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011, https://portal.uniri.hr/system/resources/docs/000/004/082/original/Skripta_Vera_%C4%8Culjak.pdf?1413283708
- Prof. dr Dušan Joksimović: POSLOVNA STATISTIKA, Megatrend univerzitet primenjenih nauka, Beograd, 2006.
- Pivac, S.: Statističke metode (predavanja, diplomski studij, kolegij "Statističke metode") e-nastavni materijal, Split, 2010.
- http://www.ef.uns.ac.rs/Download/metodologija_nir/20_uzorkovanje.pdf
- http://www.medfak.ni.ac.rs/PREDAVANJA/2.%20STOMATOLOGIJA/STATISTIKA/6.%20predavanje.pdf